XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR EQUIPOS **1º y 2º de ESO** (45 minutos)

1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x \cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

2. Cuando en *B* son las 14:00 en *A* son las 18:00. Un avión partió un viernes de *A* hacia *B* haciendo una escala intermedia en *C*. Durante la escala en *C* estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a *B* el sábado a las 12:15 (hora de *B*). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en *A* cuando despegó el avión?

3. El cuadrado *ABCD* tienen 36 cm de lado. El punto *E* está sobre el lado *AB* a 12 cm de *B*, *F* es el punto medio del lado *BC* y el punto *G* está sobre *CD* a 12 cm de *C*.
¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo *EFG* y fuera del triángulo *AFD*?

XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA INDIVIDUAL **1º y 2º de ESO** (90 minutos)

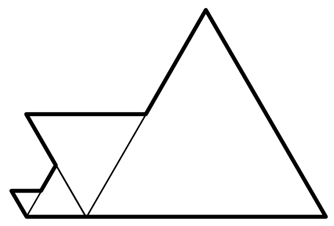
1. En un tablero de ajedrez de 8 × 8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:
- En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
- En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

2. A un concierto benéfico acudieron 2 000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive).
Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible.
¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^{9} \cdot 2^{n}$, ¿cuánto vale n?

4. Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.



XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR RELEVOS 1º y 2º de ESO (60 minutos)

➲ Empieza aquí

1A.- En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.

La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20. ¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

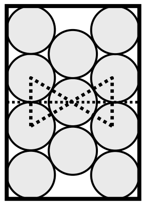
1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B.

A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.
¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga. Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

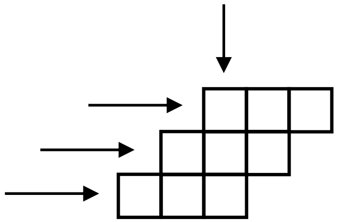
XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

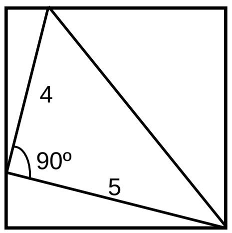
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 3º y 4º de ESO (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?



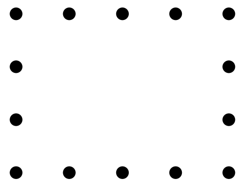
XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 3º y 4º de ESO (90 minutos)

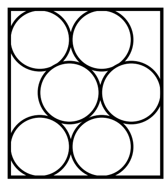
1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?



3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo?



XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

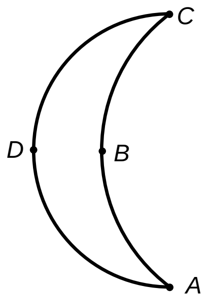
30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR RELEVOS 3º y 4º de ESO (60 minutos)

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura *ADC* es una semicircunferencia de radio T y *ABC* es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



➲ **2B.-** Empieza aquí ¿Cuánto suman las cifras del número $A = 7665667^2 - 7665662^2$?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7, \quad y = -x - 1, \quad y = T + 2(6 - x), \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

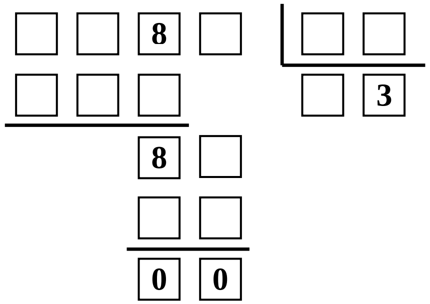
XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

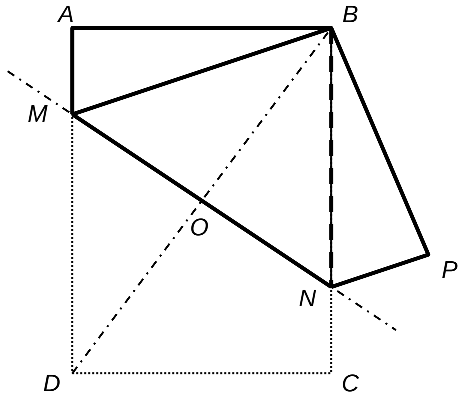
<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> Bachillerato (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

2. Completa la división



3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, *ABCD*, de lados *AB* = 8 cm y *AD* = 16 cm. La plegamos de manera que el vértice *D* coincida con el *B*, como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento *MN*.



XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

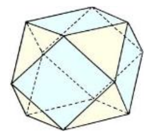
30 de noviembre de 2019

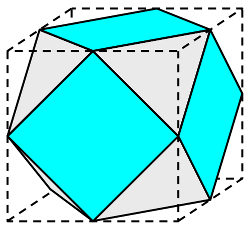
<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> Bachillerato (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta “es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio”. Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

2. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ y $g(x) = 2x - 3$ calcula el valor de $\left(f \circ g \circ f^{-1}\right)(2)$.

3. El *cuboctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices. Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3.





4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

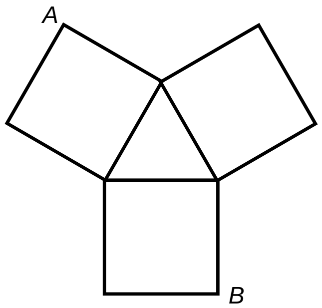
XIX Concurso Intercentros de Matemáticas *Joaquín Hernández*
Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> Bachillerato (60 minutos)

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado T con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento AB en la forma $a+b\sqrt{c}$ con a, b, c enteros y c el menor posible. ¿Cuánto vale $\frac{a+b+c}{3}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron $T-52$ minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon $T-47$ minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana.
¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

➲ **3C.-** Empieza aquí

Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema.

Si el perímetro del cuadrado es $4+4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

XIX Concurso Intercentros de Matemáticas "Joaquín Hernández" de la Comunidad de Madrid

30 de noviembre de 2019

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de ESO (45 minutos)

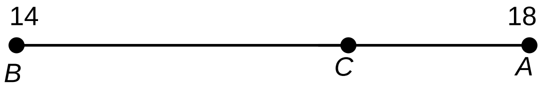
1. Como seguro que ya sabéis, la media aritmética de dos números positivos x e y es la mitad de su suma: $\frac{x+y}{2}$. Lo que tal vez no sepáis es que la media geométrica de dos números es la raíz cuadrada de su producto: $\sqrt{x\cdot y}$.
Encontrad un par de números tales que su media aritmética sea 13 y su media geométrica sea 12. Explicad cómo los habéis encontrado.

Primera forma. $\frac{x+y}{2}=13 \Rightarrow x+y=26$ $\qquad \sqrt{x\cdot y}=12 \Rightarrow x\cdot y=144$

Escribiendo la ecuación de 2º grado en función de suma y producto de sus soluciones, $x^2-sx+p=0$, tenemos $x^2-26x+144=0$ cuyas soluciones son $x_1 = 18$; $x_2 = 8$.

Segunda forma. 144 = 1·144 = 2·72 = 4·36 = 8·18 = 16·9 = 3·48 = 6·24 = 12·12 y la única descomposición en producto de dos factores cuya suma es 26, es la de 8·18.

2. Cuando en *B* son las 14:00 en *A* son las 18:00. Un avión partió un viernes de *A* hacia *B* haciendo una escala intermedia en *C*. Durante la escala en *C* estuvieron detenidos 2 horas y 10 minutos. El vuelo llegó a *B* el sábado a las 12:15 (hora de *B*). El avión estuvo volando en total 14 horas y 10 minutos. ¿Qué hora era en *A* cuando despegó el avión?

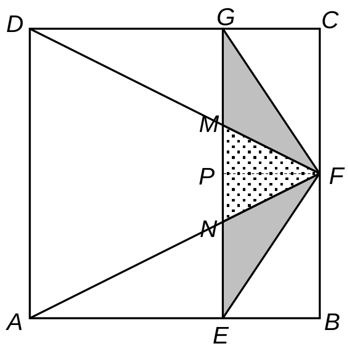


El viaje duró 14 h 10 min + 2 h 10 min = 16 h 20 min

Cuando en *B* eran las 12 h 15 min en *A* serían 12 h 15 min + 4 h = 16 h 15 min.
Como tardó 16 h 20 min significa que salió a las (16 h 15 min) – (16 h 20 min) = – 5 min del sábado, es decir a las 24 h – 5 min = 23 h 55 min del día anterior, es decir, del viernes.

3. El cuadrado *ABCD* tienen 36 cm de lado. El punto *E* está sobre el lado *AB* a 12 cm de *B*, *F* es el punto medio del lado *BC* y el punto *G* está sobre *CD* a 12 cm de *C*. ¿Cuál es el área de la región que está dentro del triángulo *EFG* y fuera del triángulo *AFD*?

PF = *EB* = 12 cm = (36:3) cm; La razón de semejanza de los triángulos *MNF* y *DAF* es 1:3 luego *MN* = *AD*:3 = (36:3) = 12 cm



$S_{MNF}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 12=72\ \text{cm}^2$ $\qquad S_{GEF}=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot 12=216\ \text{cm}^2$

Por lo tanto el área de la región pedida es:

$S = S_{GEF} - S_{MNF} = 216 - 72 = 144\ \text{cm}^2$.

También se pueden considerar los triángulos *NEF* y *GMF* de bases *NE* y *GM*, respectivamente, y altura *PF*, con lo cual el área pedida es:

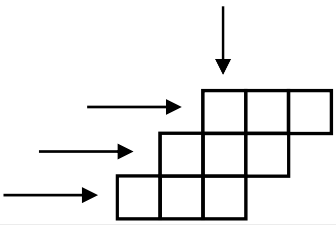
$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot NE\cdot PF\right)=NE\cdot PF=12\cdot 12=144\ \text{cm}^2$.

PRUEBA POR EQUIPOS **3º y 4º de ESO** (45 minutos)

1. Un juego consiste en elegir varios enteros positivos diferentes que sumen 17 y hallar su producto. ¿Cuál es el producto máximo que puede conseguirse?

Analizando todas las posibilidades, aunque bastaría con probar en los casos en los que los factores sean más próximos a la media de ellos, tenemos:
Dos factores. 1·16 = 16; 2·15 = 30; 3·14 = 42; 4·13 = 52; 5·12 = 60; 6·11 = 66; 7·10 = 70; 8·9 = 72.
Tres factores. 1·2·14 = 28; 1·3·13 = 39; 1·4·12 = 48; 1·5·11 = 55; 1·6·10 =60; 1·7·9 = 63; 2·3·12 = 72; 2·4·11 = 88; 2·5·10 = 100; 2·6·9 = 108; 2·7·8 = 112; 3·4·10 = 120; 3·5·9 = 135; 3·6·8 = 154; 4·5·8 = 120; 4·6·7 = 168.
Cuatro factores. 1·2·3·11 = 55; 1·2·4·10 = 80; 1·2·5·9 = 90; 1·2·6·8 = 96; 1·3·4·9 = 108; 1·3·5·8 = 120; 1·3·6·7 = 126; 1·4·5·7 = 140; 2·3·4·8 = 192; 2·3·5·7 = 210; $\boxed{2·4·5·6 = 240.}$

2. Tenéis que rellenar esta cuadrícula con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 de tal manera que los números de tres cifras que señalan las flechas sean cuadrados perfectos.



Buscamos los cuadrados perfectos de 3 cifras diferentes: 169, 196, 256, 289, 324, 361, 529, 576, 625, 729, 784, 841, 961.
Dos de ellos han de tener la misma cifra central y que no coincida ninguna de las otras. Eso sólo ocurre con 324 y 529 o 324 y 729.

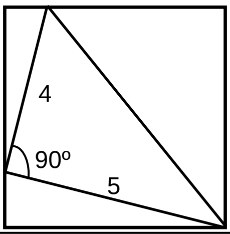
		7		
	3	2	4	
7	8	9		

		5		
	3	2	4	
1	6	9		

		3	6	1
	5	2	9	
7	8	4		

Solución buscada.

3. Hemos encajado un triángulo rectángulo de catetos 4 y 5 en un cuadrado como puedes ver en el dibujo. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

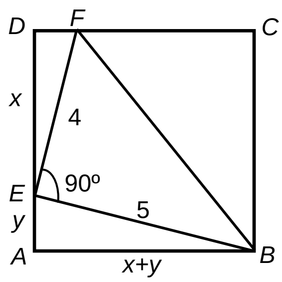


Los triángulos *ABE* y *DEF* son semejantes, luego

$\frac{x}{4} = \frac{x+y}{5} \Rightarrow 5x = 4(x+y) \Rightarrow x = 4y$

En el triángulo *ABE* $y^2 + (x+y)^2 = 5^2 \Rightarrow 26y^2 = 25 \Rightarrow y = \frac{5}{\sqrt{26}}$

Como $x = 4y$ entonces $x = \frac{20}{\sqrt{26}}$ y el lado es $\boxed{x + y = \frac{25}{\sqrt{26}}}$



PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato (45 minutos)

1. Tenemos dos números naturales tales que la suma de: su producto, su suma, el cociente del mayor entre el menor y la diferencia del mayor menos el menor es igual a 3125. ¿Cuáles son esos dos números?

$$(x\cdot y)+(x+y)+\frac{x}{y}+(x-y)=3125 \Rightarrow x\cdot y+2x+\frac{x}{y}=3125$$

$$x\cdot y^2+2x\cdot y+x=3125y \Leftrightarrow x\left(y^2+2y+1\right)=3125y \Rightarrow x=\frac{3125y}{(y+1)^2}$$

Como $3125 = 5^5$ y los números y, $(y + 1)$ son primos entre sí, $(y + 1)^2$ tiene que ser un cuadrado perfecto divisor de 5^5. Solo hay tres posibilidades: 1, 25 y 625. Pero $(y + 1)^2 = 1$ nos lleva a que $y = 0$ y el cociente $x : y$ no tiene sentido.

Si $(y+1)^2=25 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=\dfrac{3125\cdot 4}{25}=500$

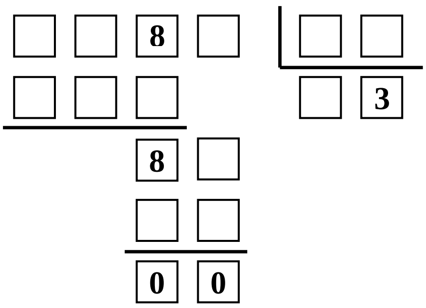
Si $(y+1)^2=625 \Rightarrow y=24 \Rightarrow x=\dfrac{3125\cdot 24}{625}=120$

Las dos posibilidades son: $\boxed{x=500,\ y=4}$ y $\boxed{x=120,\ y=24}$

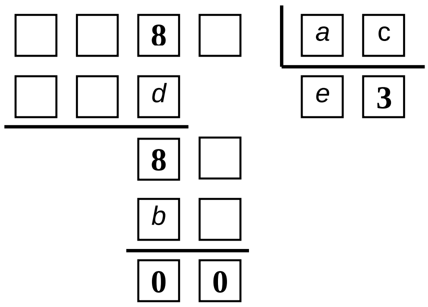
Comprobación. 2000 + 504 + 496 + 125 = 3125

2880 + 144 + 96 + 5 = 3125

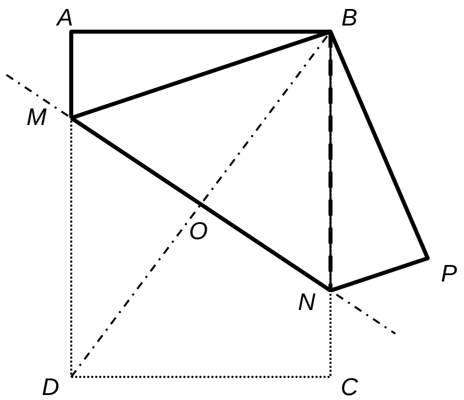
2. Completa la división



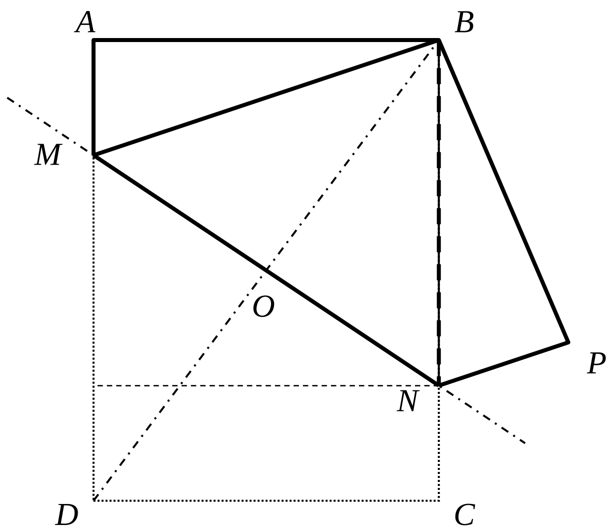
Es fácil deducir que $d = 0$ y $b = 8$. En el divisor, a solo podría ser 2 o 5, para que al multiplicar por e se obtenga un número terminado en 0, pero 5 no es posible ya que $3\cdot a$ tendría dos cifras, luego $a = 2$ y $e = 5$.
Al multiplicar 3 por c nos tenemos que llevar 2 para obtener $b = 8$, luego c es 7,8 o 9 . Pero 5 por c termina en 0, por lo que $c = 8$.
Conclusión, el divisor es 28 y el cociente 53, por lo que el dividendo es $28\cdot 53 = 1484$.



3. Disponemos de una hoja de papel rectangular, *ABCD*, de lados *AB* = 8 cm y *AD* = 16 cm.
La plegamos de manera que el vértice *D* coincida con el *B*, como muestra la figura. Calcula la longitud del segmento *MN*.



Como *MD* = *MB* y el triángulo *AMB* es rectángulo,
$MB^2 = AM^2 + AB^2$.
Tomando x = *MB*, tenemos:
$x^2 = (16-x)^2 + 8^2 \Rightarrow 0 = 320 - 32x$
Por lo tanto x = *MB* = 10 cm y
AM = 16 – 10 = 6 cm.
Trazando por *N* una recta paralela a *DC* se obtiene otro triángulo rectángulo *MSN* en el que
$MN^2 = MS^2 + NS^2$.. Además *NC* = *AM* = 6 cm y
MS = 16 – 6 – 6 = 4 cm.
De aquí se obtiene la longitud de *MN*.
$MN^2 = 4^2 + 8^2 = 80 \Rightarrow \boxed{MN = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\ \ cm}$



PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de ESO (90 minutos)

1. En un tablero de ajedrez de 8 × 8 colocamos números siguiendo las siguientes reglas:

- En las casillas blancas se escribe un 0 o un 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con ceros que con unos.
- En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

Una vez relleno hacemos la suma de todos los números que hay escritos en el tablero. ¿Cuál es la diferencia entre el menor y el mayor valor que podemos obtener para esa suma?

Los unos que menos aportan son los que están en las orillas, por lo tanto para obtener la menor suma hay que colocar 14 unos en las orillas y los otros dos en el interior.
Para que la suma sea la mayor posible, los unos han de estar en el interior, que caben los 16.

1	3	1	2	1	2	1	2
3	1	2	0	1	0	2	1
1	2	0		0		0	2
2	0		0		0	1	1
1	1	0		0		0	2
2	0		0		0	2	1
1	2	0	1	0	2	1	3
2	1	2	1	2	1	3	1

0		0	1	0	1	0	
	0	2	1	3	1	2	0
0	2	1	4	1	4	1	1
1	1	4	1	4	1	3	0
0	3	1	4	1	4	1	1
1	1	4	1	4	1	2	0
0	2	1	3	1	2	0	
	0	1	0	1	0		0

Suma mínima.
Dos unos aportan 2 puntos cada uno, $2 \cdot 2 = 4$
Doce unos aportan 3 puntos cada uno, $12 \cdot 3 = 36$
Dos unos aportan 4 puntos cada uno, $2 \cdot 4 = 8$
Además los 16 unos de los cuadros blancos.
En total 4 + 36 + 8 + 16 = 64.
Suma máxima.
Cada uno aporta 4 puntos $16 \cdot 4 = 64$
Además los 16 unos de los cuadros blancos. En total 64 + 16 = 80
La diferencia entre la mayor y la menor suma es 80 – 64 = 16.

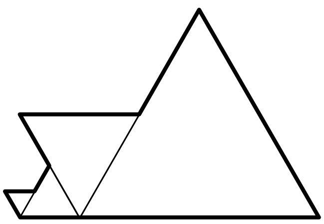
2. A un concierto benéfico acudieron 2 000 personas. Cada una pagó por su entrada una cantidad entera entre 1 y 500 euros (ambos inclusive).
Al hacer caja se observó que se habían vendido entradas de todos los precios posibles, que ningún precio se repitió más de 10 veces y que, con esas condiciones, la recaudación fue la mínima posible.
¿Cuántas entradas de cada precio se vendieron?

Si tomamos 10 de cada una de las n de menor precio y de las $(500 - n)$ restantes una sola tendremos que $10n + (500 - n) = 2000 \Rightarrow 9n = 1500 \Rightarrow n = \frac{1500}{9} = 166{,}66...$ Luego, como n es entero, habrá 10 de cada una de las 166 de menor precio. Quedan (2000 – 1660) = 340 restantes y 500 – 166 = 334 precios.
Luego habrá 333 entradas desde 168, 169,…., hasta 500 € y las 7 entradas que sobran son de 167 € .

3. Si $20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^{9} \cdot 2^{n}$, ¿cuánto vale n?

$$20^{2019} = 10^{2010} \cdot 40^{9} \cdot 2^{n} \Leftrightarrow \frac{4^{2019} \cdot 5^{2019}}{2^{2010} \cdot 5^{2010} \cdot 8^{9} \cdot 5^{9}} = 2^{n} \Leftrightarrow \frac{2^{4038}}{2^{2037}} = 2^{2001} = 2^{n} \Rightarrow n = 2001$$

4. Partiendo de un triangulito equilátero de 1 cm de lado, y añadiendo otros cuatro triángulos equiláteros tales que los lados de uno miden el doble que los del anterior hemos formado esta figura. Si continuamos hasta poner 10 triángulos, ¿cuál será el perímetro de la figura resultante? Encuentra una fórmula que te permita calcular el perímetro para n triángulos.



La sucesión es: 3, 7, 15, 31, 63,… es decir, (4-1), (8-1), (16-1), (32-1),…son potencias de dos menos 1.
Por lo tanto $\boxed{a_n = 2^{n+1} - 1}$ y $\boxed{a_{10} = 2^{11} - 1 = 2047}$

PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de ESO** (90 minutos)

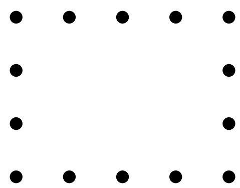
1. Dentro de un año la edad de Alberto será el doble que la edad de Bea. Dentro de unos años, cuando yo tenga 66 años, la suma de las edades de Alberto y Bea también será 66. Dentro de 6 años mi edad será un múltiplo de la suma de las edades de Alberto y Bea. ¿Cuántos años tengo hoy?

Sean A, B y C las edades de Alberto, Bea y la mía. Llamamos x al tiempo que tiene que transcurrir hasta que yo tenga 66 años. Entonces:
$A + 1 = 2(B + 1) \Rightarrow A = 2B + 1$ y también $C + x = 66$; $A + B + 2x = 66$.
Dentro de 6 años $C + 6 = k(A + B + 12)$.
Operando, $x = 66 - C$; $A + B = 66 - 2x = 66 - 2(66 - C) = 2C - 66$.

Sustituyendo resulta $C+6 = k(2C-66+12) = k(2C-54) \Rightarrow k = \dfrac{C+6}{2C-54}$.

Pero k es positivo, luego $2C - 54 > 0 \Rightarrow C > 37$. Pero también k es un entero mayor o igual a 2. $k = \dfrac{C+6}{2C-54} \geq 2 \Rightarrow C+6 \geq 4C-108 \Rightarrow 114 \geq 3C \Rightarrow 38 \geq C$. Conclusión $\boxed{C = 38}$
Las otras incógnitas son: $x = 66 - 38 = 28$; $A + B = 2\cdot 38 - 66 = 10$ y como $A = 2B + 1$ se obtiene $A = 7$, $B = 3$.

2. Estás viendo algunos puntos formando un rectángulo. Usando esos puntos como vértices, ¿cuántos triángulos podemos formar?

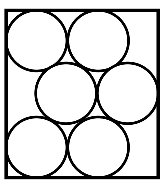


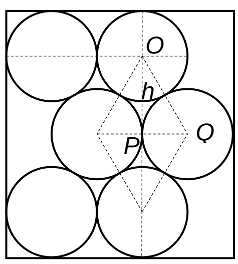
Hay 14 puntos y siempre tres de ellos determinan un triángulo salvo que estén alineados. Por lo tanto el número de triángulos que podemos formar es
$C_{14,3} - 2\cdot C_{5,2} - 2\cdot C_{4,2} = 364 - 20 - 8 = 336$

3. Hemos metido en una caja 100 tarjetas numeradas desde el 1 hasta el 100. ¿Cuál es el máximo número de tarjetas que puedo elegir para asegurarme de que entre las que elijo no hay ninguna que sea el doble de otra?

Si tomamos las 50 tarjetas que van desde el 51 hasta el 100 y elegimos todos los impares desde el 1 hasta el 25 y luego 4, 16, 20, 24, obtenemos 50 + 13 + 4 = 67.

4. Los seis círculos de la figura tienen un radio de 5 cm y, como ves, son tangentes entre sí y también a los lados de un rectángulo.
¿Cuánto miden los lados del rectángulo?





Los lados del rectángulo son: ancho $5r = 25$, alto $2r + 2h = 10 + 2h$
En el triángulo rectángulo OPQ $OP^2 = OQ^2 - PQ^2$ es decir,
$h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}$
Las dimensiones del rectángulo son: ancho 25 cm

Alto $10 + 10\sqrt{3} = 10\left(1+\sqrt{3}\right)$

PRUEBA INDIVIDUAL **Bachillerato** (90 minutos)

1. Tres amigos tienen que sembrar un huerto y atacan juntos esta tarea. Primero empiezan Don Retorcido y la niña Centésima y entre los dos plantan la mitad del huerto. Después Don Retorcido se pone a descansar y continúan con la tarea la niña Centésima y Comenúmeros. Al terminar Don Retorcido apunta “es curioso, de esta manera hemos tardado el doble de tiempo que si hubiéramos trabajado los tres juntos desde el principio”. Si en plantar una semilla Don Retorcido emplea 2 segundos y Comenúmeros emplea 5 segundos, ¿cuántos segundos emplea la niña Centésima en plantar una semilla?

Designamos con 2C al número de semillas que hay que sembrar. El número de semillas que siembran en 1 segundo Don Retorcido, lanuiña Centésima y Comenúmeros son, $\frac{1}{2}, \frac{1}{x}$ y $\frac{1}{5}$, respectivamente, el tiempo que tardan en sembrar, en el primer caso 2C semillas es:

$$\frac{C}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}+\frac{C}{\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}=\frac{2xC}{x+2}+\frac{5xC}{x+5}=xC\left(\frac{2x+10+5x+10}{(x+2)(x+5)}\right)=xC\left(\frac{7x+20}{(x+2)(x+5)}\right)$$ Don Retorcido y la niña Centésima.

Si trabajan los tres juntos $\frac{2C}{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{5}}=\frac{20xC}{5x+2x+10}=xC\frac{20}{7x+10}$. Como este tiempo es la mitad que el otro,

$$2xC\frac{20}{7x+10}=xC\left(\frac{7x+20}{(x+2)(x+5)}\right)\Rightarrow\frac{40}{7x+10}=\frac{7x+20}{(x+2)(x+5)}\Rightarrow 40x^2+280x+400=49x^2+210x+200\Rightarrow$$

$$9x^2-70x-200=0\Rightarrow x_1=10 \;\; y \;\; x_2=-\frac{20}{9}$$

No tiene sentido el valor de x_2 por lo tanto la solución es 10 segundos

2. Dadas las funciones $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$ y $g(x)=2x-3$ calcula el valor de $\left(f\circ g\circ f^{-1}\right)(2)$.

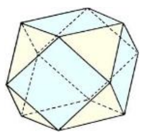
Un primer método es hallar la función $f^{-1}(x)$.

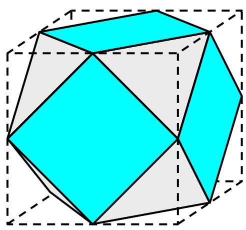
$$y=f(x)=x^3-6x^2+12x-5=(x-2)^3+3\Rightarrow y-3=(x-2)^3\Rightarrow x=2+\sqrt[3]{y-3}\qquad\Rightarrow f^{-1}(x)=2+\sqrt[3]{x-3}$$

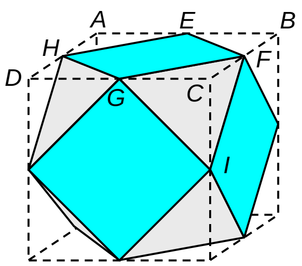
Entonces $\left(f\circ g\circ f^{-1}\right)(2)=f\left\{g\left[f^{-1}(2)\right]\right\}=f[g(1)]=f(-1)=-24$

Otro método es hallar directamente $f^{-1}(2)$. $2 = f(x)\Rightarrow\;\; 2=x^3-6x^2+12x-5\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-7=0$ que por Ruffini nos da la única solución real que es x = 1 y luego como en el caso anterior.

3. El *cuboctaedro* es un poliedro arquimediano o poliedro semirregular cuyas caras son triángulos equiláteros y cuadrados. Se obtiene truncando un cubo por los vértices.
Calcula la superficie del cuboctaedro que se obtiene truncando un cubo de volumen de 64 cm^3.







Si el volumen del cubo es 64 cm^2, su arista, AB, será de 4 cm.
El área de una cara, $ABCD$, es de 16 cm^2. El área de la cara $EFGH$ es un medio del área de la cara $ABCD$ por lo tanto S_{EFGH} = 8 cm^2.
La arista GF de esa cara es $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ cm.

Como el área de un triángulo equilátero de lado x es $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ el área de la cara FGI es S_{FGI} = $S_{FGI}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^2=2\sqrt{3}$ cm^2.

El área del cuboctaedro es $S=6\cdot 8+8\cdot 2\sqrt{3}=48+16\sqrt{3}=16\left(3+\sqrt{3}\right)$

4. En una bolsa hay bolas blancas y negras. Si quitamos 15 bolas blancas el porcentaje de bolas blancas disminuye un 3 % y si aumentamos 10 bolas negras el porcentaje de bolas blancas disminuye un 5 %. ¿Cuántas bolas de cada clase hay en la bolsa?

Solución. t bolas en total, x bolas blancas, y bolas negras. $t = x + y$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{t}-\frac{x-15}{t-15}=\frac{3}{100} \\ \frac{x}{t}-\frac{x}{t+10}=\frac{5}{100} \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 100\left(xt-15x-xt+15t\right)=3t^2-45t \\ 500x\left(\frac{10}{t\,(t+10)}\right)=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 500x=t\,(515-t) \\ 2\cdot 500x=5t\,(t+10) \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot t\,(515-t)=5t\,(t+10) \Rightarrow 1030-2t=5t+50 \Rightarrow 7t=980 \Rightarrow t=140.$$

$$500x=t\,(515-t) \Rightarrow x=\frac{140\cdot 375}{500}=105 \qquad y=140-105=35$$

PRUEBA POR RELEVOS 1º y 2º de ESO (60 minutos)

Empieza aquí **1A.-** En un curso de inglés se inscribieron 30 personas.

La media de edad de todos los inscritos es 21. La media de edad de los chicos es 25 y la de las chicas es 20. ¿Cuántos de los inscritos son hombres?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

x chicos, y chicas. $x + y = 30$. $30 \cdot 21 = 25x + 20y \Leftrightarrow 126 = 5x + 4y$. $4x + 4y = 120$. Restando $x = 6$.

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

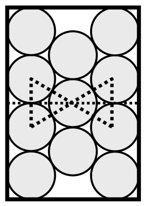
A la fiesta de la geometría acudieron $2 \cdot T$ invitados entre puntos y rectas. El primer punto bailó con 8 rectas; el siguiente punto bailó con 10 rectas; el siguiente con 12; y así sucesivamente hasta que el último punto bailó con todas las rectas.
¿Cuántas rectas fueron a la fiesta de la geometría?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

$T = 45$, $2T = 90$. Hay n puntos, el último punto bailó con $8 + 2(n - 1)$ rectas, por lo tanto $n + 8 + 2(n - 1) = 90$
$3n + 6 = 90 \Rightarrow n = 28$ Por lo tanto el número de rectas es $90 - 28 = 62$.

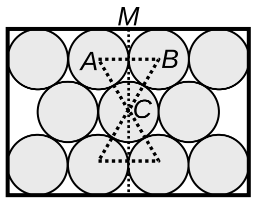
1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Disponemos de 11 balones de minibasket de $\frac{T}{2}$ cm de diámetro que queremos guardar en una caja de $\frac{T}{2}$ cm de alta y $2T$ cm de larga. Calcula el ancho de la caja más pequeña en la que caben los 11 balones.



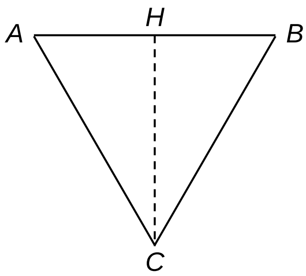
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$T = 42$.
La distribución de las pelotas en la caja más pequeña ha de ser como en la figura.
El ancho de la caja es el doble del segmento MC que mide un radio más la altura del triángulo equilátero ABC de lado 2 radios de los balones, es decir $\frac{T}{2}$ cm.



$T = 42$ cm, luego $AB = 21$ cm y $HC = \sqrt{21^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{21}{2}\sqrt{3}$ cm

El ancho de la caja debe ser $2\left(\frac{21}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{3}\right) = 21\left(1 + \sqrt{3}\right) \cong 57{,}37$ cm

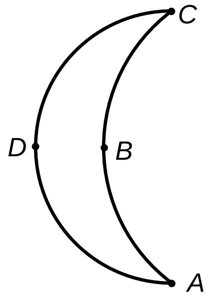


<u>PRUEBA POR RELEVOS</u> 3º y 4º de ESO (60 minutos)

2A.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3A.

En la luna de la figura *ADC* es una semicircunferencia de radio *T* y *ABC* es un cuarto de circunferencia. ¿Cuál es el área de la luna?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

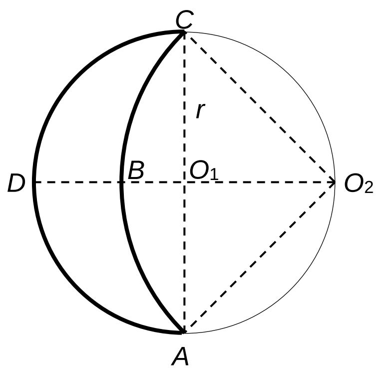


$T = 5 = r$. El triángulo ACO_2 es isósceles y rectángulo por lo que

$CO_1 = O_1O_2 = r = 5 \quad CO_2 = 5\sqrt{2}$

El área de la luna es la diferencia entre el área del semicírculo de centro O_1 y el área del segmento circular de centro O_2.

$$S = \frac{1}{2}\pi\cdot 5^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(5\sqrt{2}\right)^2\right) = \frac{25}{2}\pi - \frac{25}{2}\pi + 25 = 25$$



2B.- Empieza aquí

¿Cuánto suman las cifras del número A?

$A = 7665667^2 - 7665662^2$

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$A = 7665667^2 - 7665662^2 = (7665667 - 7665662)(7665667 + 7665662) = 5\cdot 15331329 = 76656645$.

$7 + 6 + 6 + 5 + 6 + 6 + 4 + 5 = 45$.

2C.- Sea "*T*" la respuesta del problema 3C.

Calcula el área del cuadrilátero limitado por las gráficas de estas cuatro funciones

$$y = x - 7, \quad y = -x - 1, \quad y = T + 2(6 - x), \quad y = 2x - 4$$

Nota. Es aconsejable representar gráficamente las funciones.

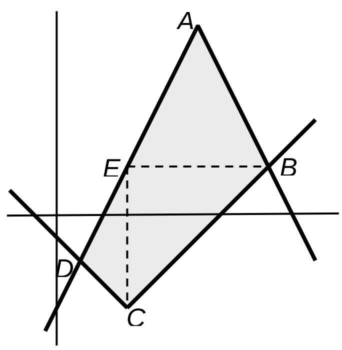
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$T = 8$

Una vez representadas se determinan las coordenadas de los vértices del cuadrilátero. $A(6, 8)$; $B(9, 2)$; $C(3, -4)$; $D(1, -2)$.

Se divide el cuadrilátero en tres triángulos mediante los segmentos *EB* y *EC*

$$S = S_{CDE} + S_{ABE} + S_{BCE} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 6 + 18 + 18 = 42$$

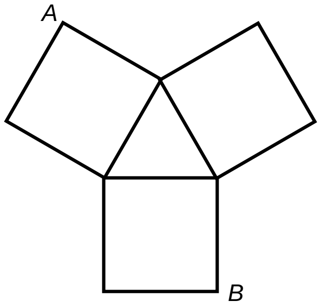


$T = 42$

. **PRUEBA POR RELEVOS** **Bachillerato** (60 minutos)

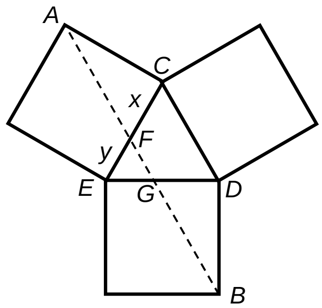
3A.- Sea "*T*" la respuesta del problema 1A.

En la figura ves un triángulo equilátero de lado *T* con un cuadrado sobre cada uno de sus lados. Expresa la longitud del segmento *AB* en la forma $a+b\sqrt{c}$ con *a, b, c* enteros y *c* el menor posible. ¿Cuánto vale $\frac{a+b+c}{3}$?



(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

T = 6 = *AC* = *EC*. El segmento *AB* es paralelo a *CD* luego el triángulo *EFG* es semejante al *CDE* y por tanto equilátero. En el triángulo *ACF* el ángulo de vértice *F* es de 60º por lo tanto



$tg\,60º = \frac{AC}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$ y

$sen 60º = \frac{AC}{AF} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{AF} \Rightarrow AF = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

$y = FG = CE - x = 6 - 2\sqrt{3}$

En conclusión $AB = 2\cdot AF + FG = 8\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} = 6 + 6\sqrt{3}$

a = 6, *b* = 6, *c* = 3. Por lo tanto $\frac{a+b+c}{3} = \frac{6+6+3}{3} = 5$

3B.- Sea "*T*" la respuesta del problema 1B

Cuando todos partieron por la mañana al gran picnic anual, cada minibús llevaba exactamente el mismo número de personas. A mitad de camino se rompieron *T* – 52 minibuses, de modo que cada minibús debió llevar una persona más. Cuando volvían a casa se estropearon *T* – 47 minibuses más, así que en el camino de regreso había en cada minibús 3 personas más que al salir por la mañana.
¿Cuántas personas asistieron al gran picnic anual?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

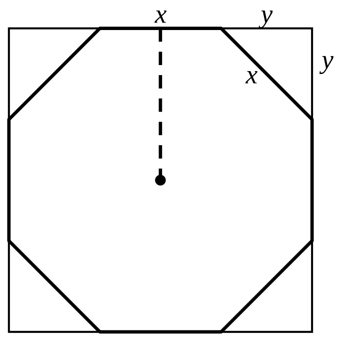
T = 62, *T* – 52 = 10, *T* – 47 = 15.
Si designamos con *a* al número de autobuses y con *p* al número de pasajeros en cada autobús, tenemos: $x\cdot y = (x-10)(y+1) = (x-25)(y+3) \Rightarrow xy = xy + x - 10y - 10 = xy + 3x - 25y - 75$. Restando *xy* se obtiene que 0 = *x* – 10*y* – 10 = 3*x* – 25*y* – 75 Resolviendo el sistema se obtiene *x* = 100, *y* = 9.
El número de personas es 100·9 = 900.

➲ Empieza aquí

3C.- Un cuadrado y un octógono regular tienen la misma apotema. Si el perímetro del cuadrado es $4+4\sqrt{2}$, ¿cuál es el perímetro del octógono?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$x + 2y = 1 + \sqrt{2}$ $\quad y^2 + y^2 = x^2 \Rightarrow x = y\sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ Sustituyendo se obtiene:



$x + \frac{2}{\sqrt{2}}x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x\left(1 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow$

$x\left(\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = 1$

El perímetro es 8*x* = 8.